

SINCRONIZACIÓN EN REDES COMPLEJAS TEORÍA Y APLICACIONES

Trabajo Fin de Grado
Andrea Girón Dolader

Director
Jesús Gómez Gardéñes

Física de la Materia Condensada
Universidad de Zaragoza
Septiembre 2014

Índice

1. Introducción	5
2. ¿Qué es la sincronización?	6
2.1. Un poco de historia	6
3. Modelo de Kuramoto	8
3.1. Descripción del Modelo	8
3.2. Análisis del Modelo	10
4. Sincronización en redes	12
4.1. Modelo de Kuramoto en redes	12
4.2. Redes Erdős Rényi y <i>scale free</i>	13
4.2.1. Umbral de sincronización en redes	14
4.3. Redes con signo	14
4.4. Redes multi-capas	16
4.4.1. Capas <i>all-to-all</i>	16
5. Aplicaciones	19
5.1. Método	19
5.2. Sistemas a estudiar	20
5.3. Resultados	22
5.3.1. Zona 1	22
5.3.2. Zona 2	25
6. Conclusiones	27
7. Agradecimientos	28
Bibliografía	29
Anexos	31
A. Tablas de especies	31

1. Introducción

Formamos parte de sistemas complejos. Desde la sociedad, cuyo funcionamiento requiere de la cooperación de millones de individuos, a las infraestructuras de comunicaciones que integran millones de móviles, ordenadores y satélites, pasando por la habilidad para comprender y razonar gracias a la actividad de millones de neuronas en nuestro cerebro.

Los sistemas complejos presentan comportamientos denominados emergentes o colectivos que surgen de la interacción entre los elementos que los constituyen. Para codificar y estudiar esta interacción contamos con el análisis de redes.

Las redes se vienen estudiando de manera teórica desde el siglo XVIII. Pero ha sido en los últimos años cuando se han convertido en una herramienta imprescindible en el estudio de sistemas complejos, proporcionando una sencilla, pero muy útil, representación de éstos.

Una red se puede definir de forma sencilla como una colección de puntos, que llamaremos nodos, unidos entre sí por links (Figura 1).

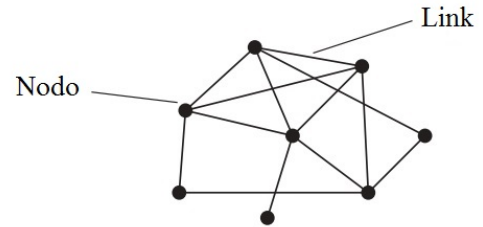


Figura 1: Esquema de una red. [1]

Existen redes con distintas propiedades que dependen de las características de las conexiones entre nodos. Por ejemplo, las redes aleatorias, o redes Erdős Rényi, se construyen uniendo los nodos entre sí con una probabilidad p , mientras que en las redes libres de escala (*scale free*) los links siguen una conexión preferencial. Así mismo, las conexiones entre nodos pueden ser idénticas o podemos introducir pesos o distinto signo para cada link.

Además, como consecuencia de la complejidad de las redes reales, surgen las redes interconectadas entre sí. Veremos como ejemplo concreto una red formada por dos capas, de manera que los nodos de una misma capa interaccionen entre sí de forma positiva e interaccionen de forma negativa con los de la otra.

Uno de los fenómenos que podemos observar en sistemas formados por muchos componentes que interactúan débilmente entre sí, es el fenómeno de la sincronización. Éste provoca un comportamiento colectivo en sistemas que inicialmente tienen un comportamiento individual.

En este trabajo se pretende mostrar una descripción del modelo de Kuramoto, uno de los más importantes en el estudio del fenómeno de la sincronización, y estudiar qué resultados se obtienen al aplicarlo a los distintos tipos de redes comentados.

Además, se pretende mostrar una aplicación de este modelo en el campo de la ecología. Se empleará para estudiar las interacciones entre las distintas especies vegetales que forman un ecosistema determinado, obteniendo resultados que puedan emplearse para ayudar a las acciones de conservación y restauración del medio natural.

2. ¿Qué es la sincronización?

La palabra sincronización, del griego $\sigma\acute{\upsilon}\nu$ (sýn), “el mismo, común” y $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ (chrónos), “tiempo”, hace referencia a un fenómeno colectivo que se presenta en diversas áreas de la ciencia. La sincronización es uno de los fenómenos más importantes para representar la aparición de un comportamiento colectivo en sistemas complejos, tanto naturales, como sintéticos. Es el proceso por el cual los ritmos individuales de los componentes de un sistema complejo se adaptan a un ritmo común debido a la interacción que existe entre ellos.

Hasta ahora, se han descubierto una gran variedad de fenómenos de sincronización en la naturaleza [2]. Por ejemplo, si un gran número de luciérnagas se agrupan en torno al mismo árbol, cada una de ellas se verá influenciada por la emisión de luz de toda la población. Así, empezarán a brillar todas al mismo tiempo creando un solo parpadeo constante. De forma similar, hay algunas especies de pájaros que pían con el mismo periodo que otros pájaros que se encuentran en la misma área, produciendo un gran ruido. En el cuerpo humano también encontramos fenómenos de sincronización. Las células en nuestro corazón se sincronizan para producir el latido, al igual que las neuronas, que se sincronizan para producir señales eléctricas en nuestro cerebro.

El fenómeno de la sincronización es importante porque consigue que sistemas formados por unidades acopladas débilmente puedan actuar al unísono provocando un comportamiento colectivo. Además, es importante conocer los fenómenos de sincronización para determinar y estudiar los efectos que tendría un mal funcionamiento del sistema. Por ejemplo, una mala sincronización de las células del corazón podría provocar una arritmia cardíaca.

2.1. Un poco de historia

Christiaan Huygens fue probablemente el primer científico en observar y describir el fenómeno de la sincronización en el siglo XVII. Observó que dos relojes de péndulo colgados del mismo soporte se sincronizaban, sus oscilaciones coincidían perfectamente y los péndulos se movían siempre en direcciones opuestas (figura 2). Huygens describió correctamente que la sincronización de los péndulos se debía a un imperceptible movimiento del soporte. En terminología moderna esto significa que los relojes estaban sincronizados en anti-fase debido al acoplamiento a través de este soporte.

Con el desarrollo de la ingeniería eléctrica se observaron nuevos fenómenos de sincronización. En 1920 W. H. Eccles y J. H. Vincent descubrieron la sincronización en un triodo, un aparato eléctrico basado en un tubo de vacío que produce una corriente periódica [4]. En los experimentos, Eccles y Vincent acoplaron dos generadores con frecuencias ligeramente diferentes y demostraron que el acoplamiento forzaba a los dos sistemas a vibrar en la misma frecuencia.

Unos años después, Edward Appleton y Balthasar van der Pol replicaron este experimento y dieron el primer paso en el estudio teórico de este efecto [5]. Considerando el caso más simple, mostraron que se puede sincronizar la frecuencia de un generador con una señal externa de una frecuencia ligeramente distinta. Estos estudios fueron muy importantes ya que los generadores de triodo se convirtieron en el elemento básico de los sistemas de comunicación por radio.

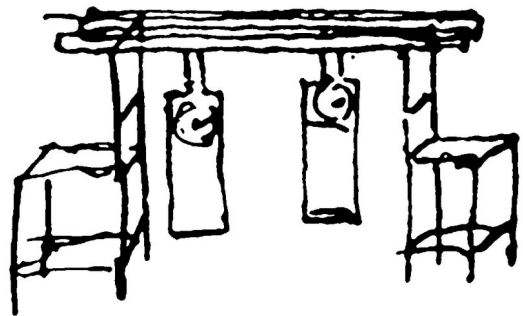


Figura 2: Dibujo original de Huygens ilustrando sus experimentos con relojes de péndulo [3]

A mitad del siglo XIX, William Strutt [6] describió el fenómeno de sincronización en sistemas acústicos. Observó no solo la sincronización de dos tubos de órgano sonando a la vez sino también el efecto de ‘quenching’, cuando el acoplamiento suprimía el sonido.

Los fenómenos de sincronización en sistemas vivos también se conocen desde hace años. En 1729 Jean-Jacques Dortous de Mairan, astrónomo y matemático francés, realizó experimentos con una planta de judía. Observó que las hojas de la planta se movían de acuerdo con el cambio entre el día y la noche, incluso cuando la planta se encontraba en una habitación oscura.

Como éste, se han realizado diferentes experimentos que demuestran que todo sistema biológico, por simple que sea, tiene un reloj biológico interno [2]. El origen de este fenómeno está aún sin resolver, sin embargo, es bien sabido que puede ajustar el ritmo circadiano de un organismo a señales externas. El ritmo circadiano de un sistema completamente aislado, bajo condiciones controladas y constantes, puede diferir de un ciclo de 24 horas. Sin embargo, bajo condiciones naturales los relojes biológicos se ajustan de acuerdo al periodo de 24 horas de la Tierra.

Los trabajos de Albert Winfree, a mitad del siglo XIX, ofrecieron la primera modelización matemática de la sincronización en osciladores biológicos [7]. Descubrió que una población de osciladores puede exhibir un notable comportamiento cooperativo [8]. Mostró que cuando el acoplamiento entre los osciladores es pequeño con respecto a la dispersión de sus frecuencias naturales, el sistema se comporta de manera incoherente, con cada oscilador moviéndose con su frecuencia natural. Sin embargo, al aumentar el acoplamiento por encima de un valor crítico, el sistema comienza a sincronizarse. Winfree se dio cuenta de que este fenómeno cooperativo era el análogo temporal a la transición de fase.

El trabajo de Winfree sobre los osciladores acoplados fue uno de los primeros ejemplos de sistema autoorganizado. Comenzó como un problema biológico, pero tuvo un impacto mayor en el estudio de los sistemas complejos y en la física estadística. Este comportamiento cooperativo impresionó a Yoshiki Kuramoto que comenzó a trabajar en la sincronización colectiva en 1975. En su primer trabajo presentó sus resultados al análisis del problema [9], lo que más tarde se conocería como Modelo de Kuramoto.

A continuación se presentan las principales características de este modelo, que se ha convertido en uno de los más importantes en el estudio del fenómeno de la sincronización.

3. Modelo de Kuramoto

3.1. Descripción del Modelo

Kuramoto propuso estudiar las ecuaciones dinámicas de un sistema formado por osciladores idénticos débilmente acoplados entre sí. El modelo de Kuramoto corresponde al caso más simple: acoplamiento puramente sinusoidal e igualmente ponderado, entre todos los osciladores del sistema [10].

Llamamos N al número de osciladores, ω_i a la frecuencia natural de cada oscilador y K a la fuerza de acoplamiento. Las frecuencias ω_i , se asignan de acuerdo a una distribución de probabilidad $g(\omega)$. Por simplicidad, Kuramoto utilizó una distribución unimodal y simétrica en torno a una frecuencia media Ω .

Si establecemos la frecuencia media como $\Omega = 0$ redefiniendo $\theta_i \rightarrow \theta_i - \Omega t$, lo que corresponde a que las fases roten con una frecuencia Ω , podemos obtener la evolución del sistema a partir de la siguiente ecuación:

$$\dot{\theta} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Para visualizar la evolución de las fases, podemos imaginar un conjunto de puntos moviéndose alrededor del círculo unidad en el plano complejo (Figura 3). Podemos definir el parámetro de orden (2), como una magnitud macroscópica que se puede interpretar como el ritmo colectivo producido por todos los osciladores:

$$r e^{i\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (2)$$

donde $r(t)$ mide la coherencia de las fases mientras que $\Psi(t)$ es la fase media.

Si todos los osciladores se mueven en grupo, tendremos $r \approx 1$ y se comportarán como un único gran oscilador. Por otra parte si los osciladores están dispersos alrededor del círculo, entonces $r \approx 0$, los osciladores se mueven incoherentemente y no se observa un ritmo macroscópico.

Kuramoto se dio cuenta de que podía escribir la ecuación del modelo (1) en función del parámetro de orden. Multiplicando los dos lados de la ecuación (2) por $e^{-i\theta_i}$ se obtiene:

$$r e^{i(\Psi - \theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j - \theta_i)}, \quad (3)$$

Igualando las partes imaginarias se obtiene:

$$r \sin(\Psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (4)$$

que se identifica con el término de interacción de la ecuación (1).

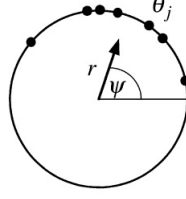


Figura 3: Interpretación geométrica del parámetro de orden. Las fases, θ_j , están representadas en el círculo unidad.

Sustituyendo en (1) obtenemos la expresión:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\Psi - \theta_i). \quad (5)$$

De esta forma, el carácter de campo medio del modelo es obvio. Cada oscilador parece estar desacoplado de los demás, sin embargo, están interactuando todos entre sí a través de las magnitudes r y Ψ . Esto hace que la fase, θ_i , sea empujada hacia la fase media, Ψ . Además la fuerza efectiva de acoplo, Kr , es proporcional a la coherencia, r . Esto hace que conforme la población sea más coherente, r crezca, por lo que Kr crece también, provocando que cada vez más osciladores estén sincronizados. Si la coherencia sigue aumentando, el proceso continúa y se produce una sincronización espontánea.

En la figura 4 se muestran los resultados obtenidos al integrar el modelo numéricamente. Se han asignado las frecuencias naturales de cada oscilador de acuerdo a una distribución gaussiana centrada en 0. Las simulaciones muestran que para todo valor de K por debajo de un cierto valor, $K_c \approx 1$, los osciladores se comportan como si estuvieran desacoplados: las fases se distribuyen uniformemente en el círculo. Cuando K es mayor que K_c este estado incoherente se vuelve inestable y r crece, reflejando la formación de un pequeño grupo de osciladores que se sincronizan, generando una oscilación colectiva.

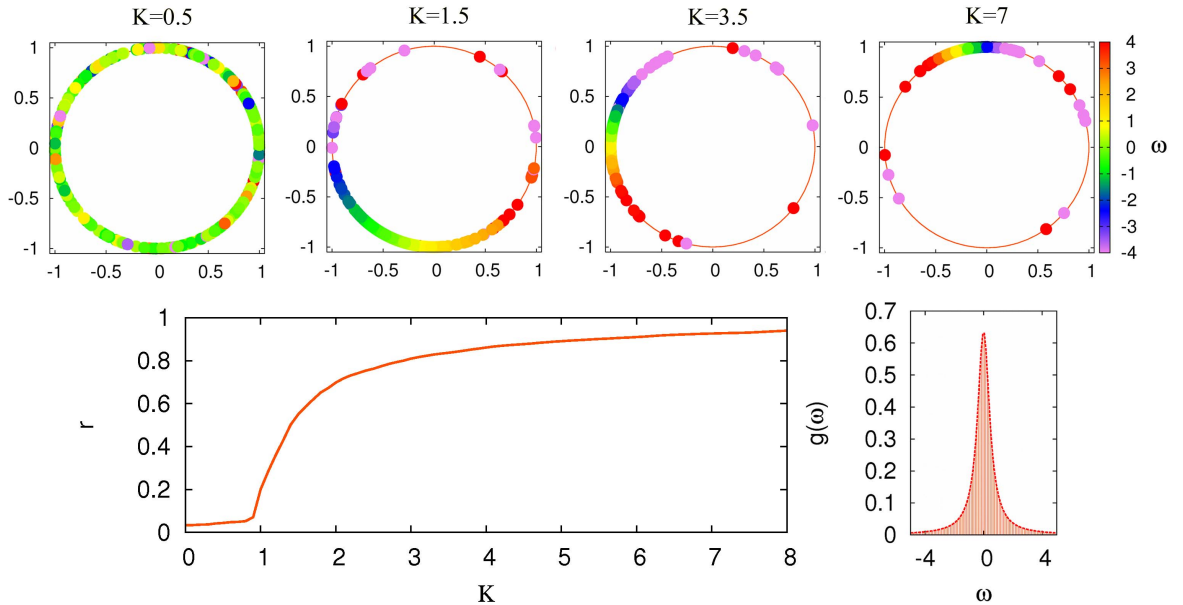


Figura 4: Resultados numéricos para el Modelo de Kuramoto. En las gráficas superiores están representadas las fases de cada oscilador en el círculo unidad para diferentes valores de K . Los colores representan las frecuencias naturales de cada oscilador. En las inferiores se representa la evolución del parámetro de orden en función de K y la distribución de frecuencias naturales.

3.2. Análisis del Modelo

Kuramoto buscaba soluciones estables, con $r(t)$ constante y $\Psi(t)$ rotando a frecuencia Ω [10]. Eligiendo correctamente el origen de las fases se puede establecer $\Psi \equiv 0$, por lo que la ecuación (5) quedaría:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin \theta_i. \quad (6)$$

La solución estacionaria, $\dot{\theta}_i = 0$, de (6) muestra dos tipos de comportamiento a largo plazo, dependiendo del valor de $|\omega_i|$ en comparación con Kr . Los osciladores con $|\omega_i| \leq Kr$ alcanzan un punto estable definido por:

$$\omega_i = Kr \sin \theta_i \quad (7)$$

donde $|\theta_i| \leq \frac{\pi}{2}$. Estos osciladores se llaman ‘locked’ porque su fase está bloqueada a frecuencia Ω .

Por otra parte los osciladores con $|\omega_i| > Kr$ están a la deriva, se mueven a lo largo del círculo de manera no uniforme, acelerando en algunas fases y frenando en otras. Los osciladores más rápidos traspasan a los bloqueados mientras que los más lentos son adelantados por estos. Los osciladores bloqueados corresponden al centro de $g(\omega)$ y los que están a la deriva a los de los extremos.

Este resultado parece contradecir la suposición de que r y Ψ son constantes. Kuramoto evitó este problema exigiendo que los osciladores que están a la deriva formen una distribución estacionaria en el círculo. Así r y Ψ son constantes aunque los osciladores estén en movimiento.

Sea $\rho(\theta, \omega)$ la fracción de osciladores con frecuencia natural ω cuya fase está entre θ y $\theta + d\theta$. Para que el sistema sea estacionario, $\rho(\theta, \omega)$ tiene que ser inversamente proporcional a la velocidad $\dot{\theta}$, los osciladores se acumulan en el círculo para $\dot{\theta}$ pequeñas y se dispersan para $\dot{\theta}$ grandes. Así tenemos:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|} \quad (8)$$

La constante de normalización C viene determinada por $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega) d\theta = 1$, luego:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|} d\theta = \frac{2C\pi}{\sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}} = 1 \rightarrow C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2} \quad (9)$$

Podemos calcular para qué valor de K el sistema sincroniza.

El valor constante del parámetro de orden tiene que ser consistente con la ecuación 2. Utilizando los brackets para indicar promedio, tenemos:

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_{bloqu.} + \langle e^{i\theta} \rangle_{deriva} \quad (10)$$

Hemos dicho que $\Psi = 0$, por lo que $\langle e^{i\theta} \rangle = r e^{i\Psi} = r$, luego:

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{bloqu} + \langle e^{i\theta} \rangle_{deriva} \quad (11)$$

Empezamos evaluando el primer término. Tenemos:

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{bloqu} = \langle \cos \theta \rangle_{bloqu} + i \langle \sin \theta \rangle_{bloqu} \quad (12)$$

Puesto que $g(\omega) = g(-\omega)$, la distribución de las fases bloqueadas es simétrica respecto a $\theta = 0$. Por tanto, la parte imaginaria se hace cero y la ecuación nos queda:

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{bloqu} = \langle \cos \theta \rangle_{bloqu} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos \theta(\omega) g(\omega) d\omega \quad (13)$$

Donde θ viene definido implícitamente por (7). Sustituyendo:

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{bloqu} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta g(Kr \sin \theta) Kr \cos \theta d\theta = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (14)$$

Consideramos ahora los osciladores que están a la deriva.

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{deriva} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta \quad (15)$$

Esta integral se anula ya que $g(\omega) = g(-\omega)$ y la ecuación (8) implica que $\rho(\theta + \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$.

Así, nos ha quedado:

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (16)$$

Esta ecuación tiene como solución trivial $r=0$, para cualquier valor de K . Este resultado corresponde a un estado completamente incoherente. Una segunda rama de soluciones satisface la ecuación:

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (17)$$

Con $r \rightarrow 0^+$, resolviendo la integral llegamos a la solución:

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)} \quad (18)$$

La expresión (18) nos muestra el valor de K en el que comienza la sincronización del sistema.

4. Sincronización en redes

En este apartado se pretende mostrar los resultados numéricos del modelo estudiando el comportamiento de sistemas que forman redes con diferentes configuraciones. Para la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales del modelo se ha utilizado el método Runge-Kutta de orden 4. Como condiciones iniciales se establecen las fases iniciales entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ y las frecuencias naturales siguiendo una distribución uniforme entre -0.5 y 0.5.

Ya hemos visto en el apartado anterior los resultados numéricos para el modelo de Kuramoto conocido como *all-to-all* (figura 4), en el que todos los osciladores están conectados entre sí. En este caso observábamos una transición de segundo orden desde $r = 0$ a $r \approx 1$ siendo $K_c = 2/\pi g(0)$, el acoplo crítico a partir del cual el sistema se sincronizaba.

Vamos a estudiar ahora cómo se comportan sistemas en los que no todos los osciladores están conectados entre sí. Utilizaremos configuraciones más complejas como redes Erdős Rényi o *scale free*; además, utilizaremos redes con signo, que introducen interacciones negativas entre nodos y finalmente, redes interconectadas entre sí.

4.1. Modelo de Kuramoto en redes

Hasta ahora hemos tratado con el modelo de Kuramoto original, en el que todos los nodos están conectados entre sí.

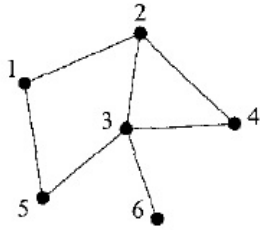


Figura 5: Ejemplo de una red

Necesitamos ahora introducir algún término en las ecuaciones que nos permita estudiar sistemas que forman redes complejas.

Una de las formas más sencillas de representar una red matemáticamente es la matriz de adyacencia [11]. La matriz de adyacencia, A , es una matriz de elementos A_{ij} tal que:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay un link entre los nodos } i \text{ y } j \\ 0 & \text{si no hay link entre los nodos } i \text{ y } j \end{cases} \quad (19)$$

Si consideramos una red como la que se muestra en la figura 5 nuestra matriz de adyacencia será de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Como vemos los elementos de la diagonal son 0 ya que no existen *self-links*. Además, la matriz es simétrica, si el nodo i está conectado al nodo j , el j estará conectado al i .

Si introducimos esta matriz en el modelo de Kuramoto (6), definiendo $\lambda \equiv \frac{K}{N}$, la ecuación que nos da la evolución de la fase de cada oscilador nos queda:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (21)$$

Siendo el parámetro de orden:

$$r = \frac{1}{N} \sum_j^N e^{i\theta_j} \quad (22)$$

Así, si estamos calculando $\dot{\theta}_i$ y el elemento de matriz A_{ij} es cero, el segundo término de la ecuación (21) se anula, es decir, el movimiento del nodo j no tiene ningún efecto sobre el i .

4.2. Redes Erdős Rényi y *scale free*

Paul Erdős y Alfréd Rényi describieron las redes que forman el sistema de comunicaciones y los sistemas biológicos como redes aleatorias en 1959 [12]. Desde entonces, y durante más de cuarenta años, se consideró que todas las redes complejas eran redes que seguían ese modelo.

Este tipo de redes se construyen uniendo cada par de nodos con una cierta probabilidad, p (figura 6A). Tienen como propiedad que la mayoría de nodos tienen un grado, k , próximo al grado medio de la red y que la desviación con respecto a esta media es muy pequeña. Siendo $P(k)$ la probabilidad de que un nodo aleatorio de la red sea de grado k , en el límite $N \rightarrow \infty$, en una red aleatoria tenemos:

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (23)$$

Es decir la distribución de links en una red aleatoria sigue una distribución de Poisson.

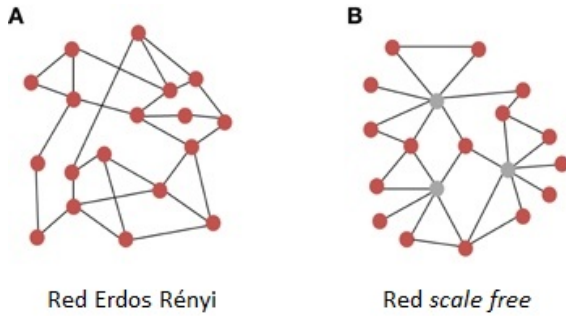


Figura 6: Ejemplos de redes ER y SF

En 1999, Albert Barabási, junto con Hawoong Jeong y Réka Albert, realizó un mapa de la web [13] en el que los nodos eran las páginas web y los links los enlaces entre ellas. Esperaba encontrar que éstos seguirían el modelo de red aleatoria, debido a la gran variedad de intereses de los usuarios y la gran cantidad de páginas web diferentes.

Sin embargo, los resultados no fueron los que esperaban. Encontraron que más de un 80 % de las páginas visitadas tenían 4 links o menos y un 0.01 % de las páginas tenían más de 1000.

Es decir, se trataba de una red formada por muchos nodos con muy pocas conexiones y pocos nodos, denominados *hubs*, con un gran número de conexiones (figura 6B).

Este tipo de redes se conoce como *scale free* y tienen como propiedad que la distribución de links sigue una ley de potencias:

$$P(k) \sim k^{-\gamma} \quad (24)$$

Se ha observado que la mayoría de las redes reales que siguen una ley de potencias tienen un exponente en el rango $2 < \gamma \leq 3$.

Aunque las redes Erdős-Rényi aún se utilizan para estudiar algunos sistemas, se ha llegado a la conclusión de que muchas de las redes reales siguen el modelo de red *scale free*.

En una red con una distribución concreta, $P(k)$, podemos calcular el punto crítico, λ_c , que nos diferencia el estado desincronizado del estado sincronizado a partir del primer y segundo momento de

la distribución [14]:

$$\lambda_c = \frac{2 \langle k \rangle}{\pi g(0) \langle k^2 \rangle} \quad (25)$$

En el caso de una distribución homogénea se puede demostrar que $\langle k^2 \rangle = \langle k \rangle^2 = k^2$, por lo que la expresión (25) queda:

$$\lambda_c = \frac{2}{\pi g(0) k} \quad (26)$$

Volviendo al modelo de Kuramoto original, en el que todos los nodos están conectados entre sí, tenemos $k=N$. Sustituyendo este valor en la expresión (26) y recordando que $\lambda = K/N$ recuperamos el resultado obtenido anteriormente (18):

$$\lambda_c = \frac{2}{\pi g(0) N} \quad (27)$$

4.2.1. Umbral de sincronización en redes

Si estudiamos el fenómeno de sincronización a través del modelo de Kuramoto en estas redes obtenemos los resultados que se muestran en la figura 7. Se trata de dos redes de 500 nodos, una red *scale free* con $\gamma = 3$ y una red Erdős-Rényi.

Como vemos las redes *scale free* favorecen la sincronización. Esto se debe a la presencia de *hubs*, nodos muy conectados que juegan un importante papel incorporando nodos al estado sincronizado.

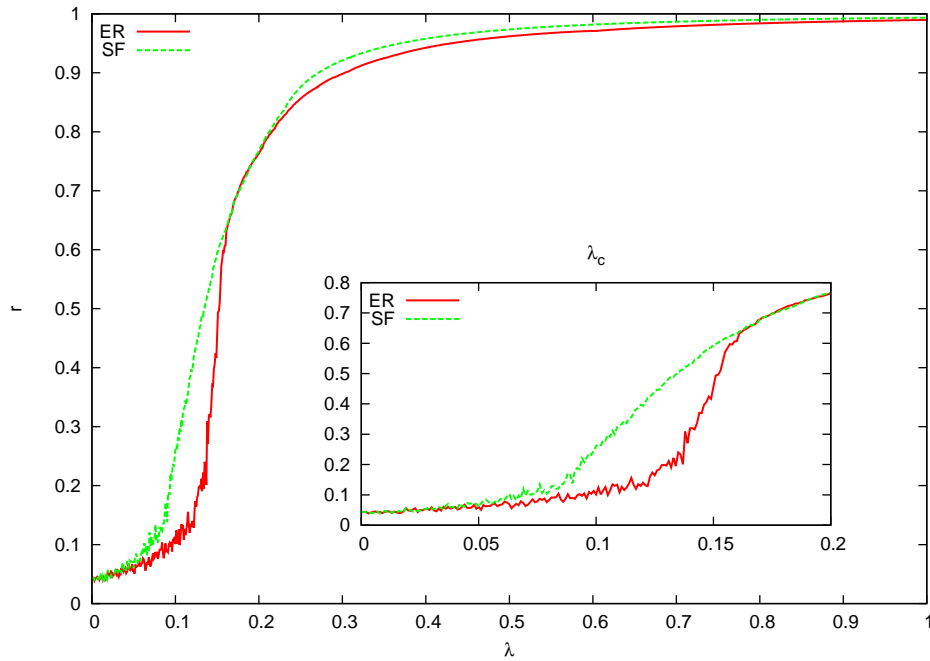
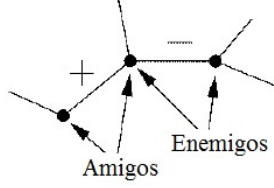


Figura 7: Evolución del parámetro de orden, r en función del acoplamiento, λ para dos tipos distintos de red.

4.3. Redes con signo

En el apartado anterior hemos descrito dos tipos de redes en las que los links que unen los nodos unos con otros son siempre iguales. Sin embargo, en algunas redes sociales y, ocasionalmente, en otros

tipos de redes, estos links pueden ser tanto positivos como negativos [11]. Por ejemplo, en una red social podríamos denotar la amistad por un link positivo y la enemistad por un link negativo (figura 8).



Es importante remarcar que un link negativo no es lo mismo que la ausencia de un link. Un link negativo indica que los nodos interactúan entre sí, pero de una forma negativa, mientras que la ausencia de link significa que esos dos nodos no interactúan de ninguna forma, ni positiva ni negativamente.

Para estudiar la sincronización en un sistema en el que los links que conectan los nodos tienen signo tenemos que modificar la matriz de adyacencia para introducir las interacciones negativas (28).

Figura 8: Ejemplo de red con signo

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Interacción positiva entre los nodos } i \text{ y } j \\ 0 & \text{Nodos } i \text{ y } j \text{ no conectados} \\ -1 & \text{Interacción negativa entre los nodos } i \text{ y } j \end{cases} \quad (28)$$

En la figura 9 se muestra la curva $r(\lambda)$ para una red ER con $N=500$. Cada curva representa la misma red con un porcentaje diferente de interacciones negativas. Para construirlas se ha cogido la red simulada en el apartado anterior y se ha cambiado cada link positivo por uno negativo con una probabilidad, p_n , distinta.

Como era de esperar, la presencia de un mayor número de interacciones negativas retrasa la sincronización del sistema. Además, vemos que conforme p_n aumenta no se alcanza el estado de sincronización completa y $r < 1$.

En la figura 10 se muestra la misma curva, esta vez para una red *scale free*. Observamos los mismos resultados, conforme p_n aumenta la sincronización se retrasa y el estado final no llega a la sincronización completa.

Sin embargo, para una misma p_n , la sincronización aparece antes en la red SF, resultado coherente con lo visto anteriormente (figura 7), la presencia de *hubs* favorece el estado sincronizado. Por la misma razón, el sistema alcanza una mayor coherencia.

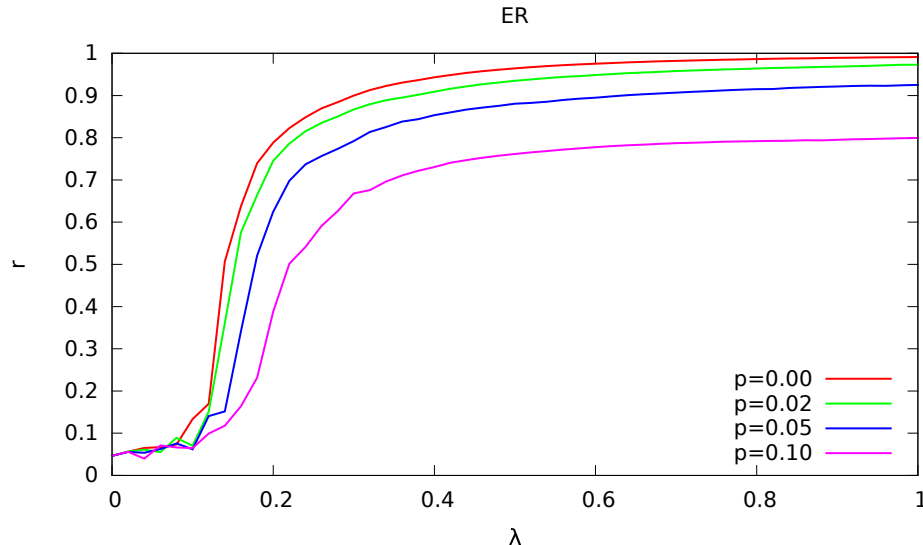


Figura 9: Curva $r(\lambda)$ para una red ER con diferente número de interacciones negativas.

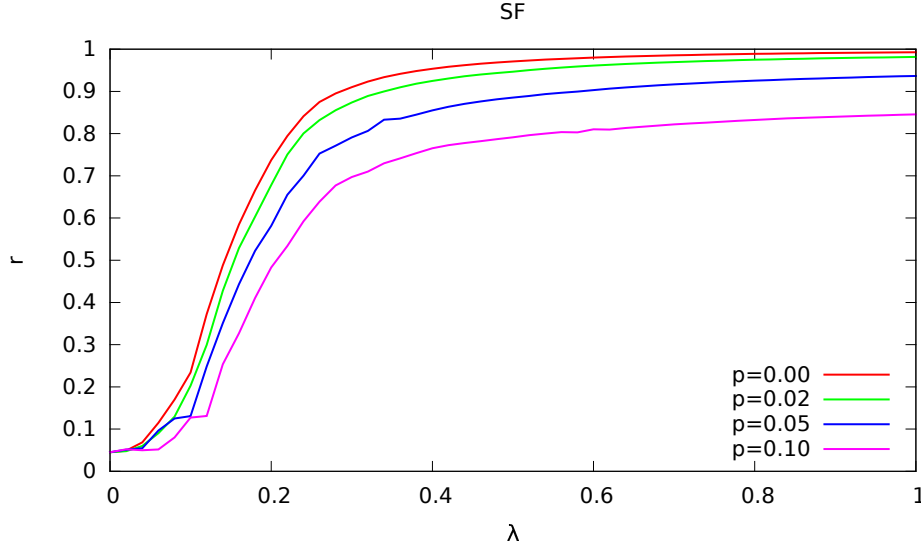


Figura 10: Curva $r(\lambda)$ para una red SF con diferente número de interacciones negativas.

4.4. Redes multi-capa

Las teorías modernas de redes complejas se enfrentan a nuevos retos que surgen de la necesidad de comprender la evolución de sistemas reales. Uno de los problemas abiertos a estudio es la caracterización topológica y dinámica de sistemas formados por dos o más redes interconectadas [15].

Muchos sistemas, tanto naturales como sintéticos, se caracterizan por la presencia simultánea de diferentes sub-redes organizadas en capas separadas, con nodos y links cualitativamente distintos.

Un ejemplo en el que la caracterización de un sistema como red multi-capa es útil, es el estudio de las redes de transporte. En concreto, podemos comentar la red de transporte aéreo (ATN) [16]. La forma tradicional de estudiar este sistema es representándolo como una red formada por una sola capa, donde los nodos representan aeropuertos, mientras que los links indican que existe un vuelo directo entre dos de ellos. Sin embargo, una representación más exacta sería considerar que cada compañía aérea corresponde a una capa diferente, conteniendo cada una de ellas todos los aeropuertos (nodos) y todas las conexiones (links) entre ellos. Así, habría nodos comunes a varias capas, pero las conexiones entre ellos variarían de una a otra.

4.4.1. Capas *all-to-all*

Vamos a estudiar un sistema formado por dos capas con $N=500$ cada una. En cada capa todos los nodos están conectados entre sí, igual que en el Kuramoto original, por links con signo positivo. Las conexiones entre capas se construyen uniendo cada nodo de la primera con cada nodo de la segunda con una probabilidad p . Esta interacción entre capas se considera de signo negativo. Así, los miembros de una capa interactúan positivamente con los de su misma capa, mientras que tienen una interacción negativa con los de la otra (figura 11).

En este caso no nos vale simplemente introducir las interacciones negativas en la matriz de adyacencia como en el caso de una sola red (28), ya que las interacciones negativas se producen entre nodos de distinta capa.

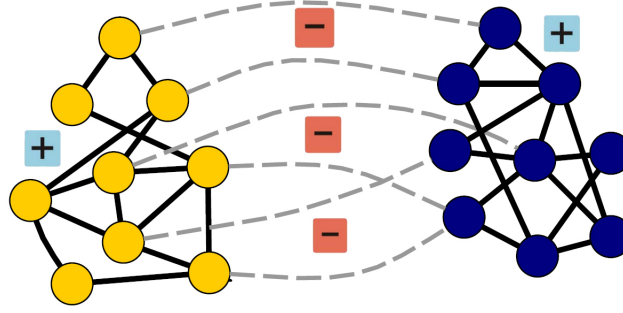


Figura 11: Esquema de dos redes interconectadas entre sí.

Puesto que dentro de cada capa todos los nodos están conectados entre sí podemos utilizar el modelo de Kuramoto original (1). Sin embargo, necesitamos construir una matriz para las interacciones negativas:

$$A'_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{Nodos } i \text{ y } j \text{ no conectados} \\ -1 & \text{Nodos } i \text{ y } j \text{ conectados} \end{cases} \quad (29)$$

Hay que remarcar que esta matriz no es simétrica como anteriormente, ya que en este caso si el nodo i (capa 1) está conectado al j (capa 2), el j (capa 1) no tiene por que estar conectado al i (capa 2).

Una vez tenemos construida la matriz de interacciones negativas la introducimos en la ecuación (1). Puesto que los nodos interaccionan entre los de una misma capa y con los de la otra, tendremos dos ecuaciones, una para el estado de sincronización de cada capa:

$$\dot{\theta}_i^{(1)} = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^{N_1} \sin(\theta_j^{(1)} - \theta_i^{(1)}) + \lambda \sum_{i=1}^{N_2} A'_{ij} \sin(\theta_i^{(1)} - \theta_j^{(2)}) \quad (30)$$

$$\dot{\theta}_i^{(2)} = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^{N_2} \sin(\theta_j^{(2)} - \theta_i^{(2)}) + \lambda \sum_{i=1}^{N_1} A'_{ij} \sin(\theta_i^{(2)} - \theta_j^{(1)}) \quad (31)$$

Siendo $\theta^{(1)}$ las fases de los nodos pertenecientes a la capa 1 y $\theta^{(2)}$ las de los nodos pertenecientes a la capa 2.

En la figura 12 se muestran los resultados obtenidos para dos capas unidas con una probabilidad, $P=0.4$. La sincronización de ambas es análoga ya que éstas son idénticas. Sin embargo, la sincronización total del sistema, es decir, teniendo en cuenta los nodos pertenecientes a ambas capas, cae a cero.

La explicación de este resultado la tenemos en la figura 13. Se han representado las fases de todos los nodos en el círculo unidad para distintos valores de λ . Por debajo del λ_c el sistema está totalmente desincronizado, mientras que conforme aumenta λ se empiezan a diferenciar dos grupos con fases opuestas.

Este resultado es interesante porque, aunque dentro de cada capa se alcanza el estado de sincronización, representando las dos vemos que se sincronizan con fases opuestas. Esto se debe a que la interacción entre nodos de capas distintas es de signo negativo.

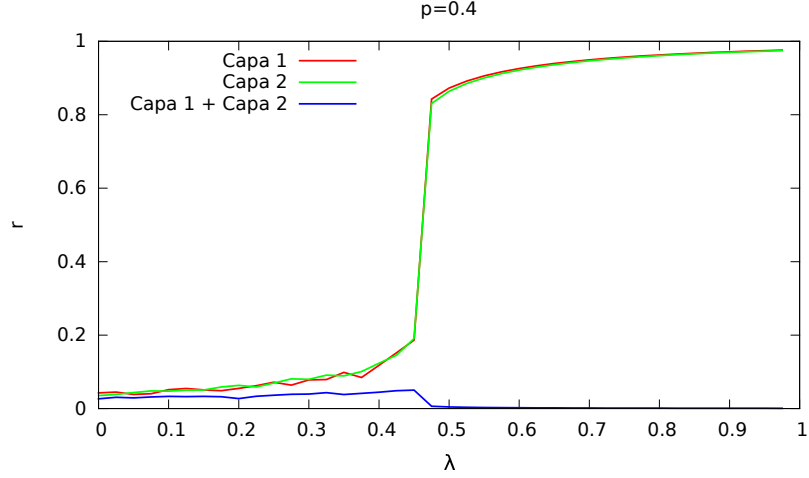


Figura 12: Curva $r(\lambda)$ para las dos capas que forman el sistema, y el sistema completo con $p = 0,4$.

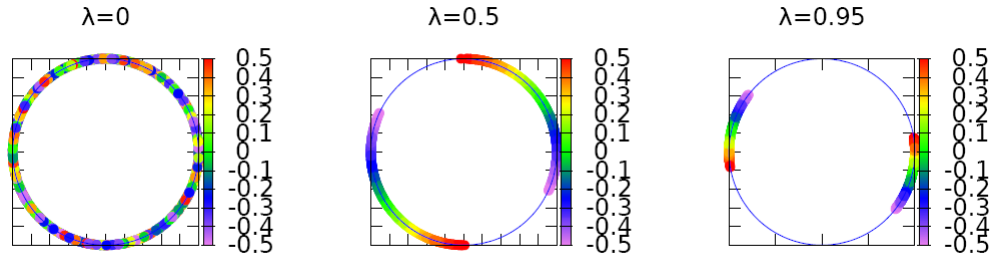


Figura 13: Fases de los nodos de ambas capas representadas en el círculo unidad para diferentes valores del acoplamiento, λ .

En la figura 14 se ha representado la curva $r(\lambda)$ para los nodos de una de las capas. Esta vez se han construido las conexiones entre capas con distintas probabilidades. Conforme aumenta la probabilidad, el λ_c es menor y se alcanza antes el estado de sincronización. Este resultado concuerda con lo comentado anteriormente, la existencia de una interacción negativa entre capas empuja a los nodos de una misma capa a agruparse. Cuantas más conexiones hay entre capas, más fuerte es este efecto y antes se alcanza el estado sincronizado dentro de cada capa.

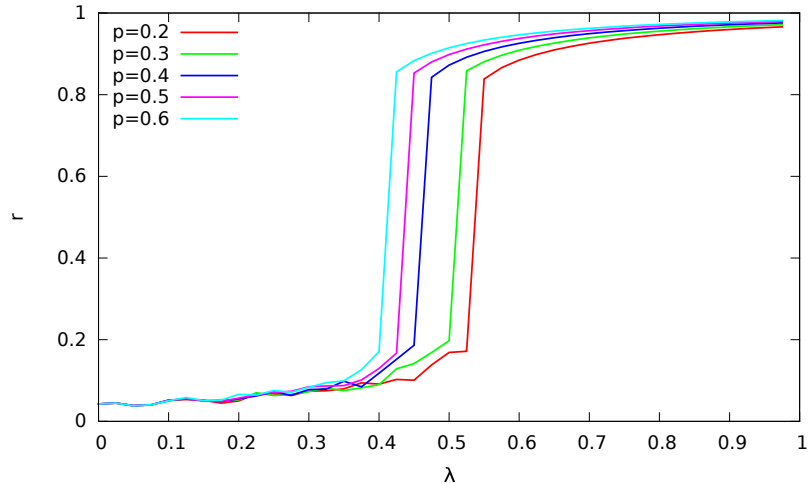


Figura 14: Curva $r(\lambda)$ para una red con dos capas unidas con distintas probabilidades.

5. Aplicaciones

El estudio de las interacciones entre seres vivos mediante el uso de redes ha ocupado una importante rama de la investigación en ecología desde mediados del siglo XX [17]. El estudio de las interacciones a nivel de comunidad (teniendo en cuenta todas las especies presentes en una zona) es fundamental para entender todos los procesos que ocurren en un ecosistema y puede emplearse para ayudar a las acciones de conservación y restauración del medio natural [18].

Sin embargo, hasta ahora la investigación en ecología se ha centrado en sistemas con un tipo particular de interacción, y no existen ejemplos de comunidades que analicen simultáneamente interacciones con signos distintos.

En este trabajo vamos a emplear el modelo de Kuramoto anteriormente estudiado en redes multi-capa para analizar una comunidad particular: la red de interacciones que se establece entre las diferentes especies vegetales de una comunidad semiárida.

En estos ambientes las plantas tolerantes a la sequía crean manchas de vegetación [19]. Estas manchas actúan como microhábitats donde las condiciones de humedad son más benignas y las especies no tolerantes pueden establecerse. Esta interacción se llama *facilitación* [20]. Además, incluiremos en este sistema las interacciones de *competencia* que se establecen entre las plantas mejor adaptadas.

Específicamente, vamos a identificar las especies que juegan un papel más importante dentro de la red de interacciones del sistema de estudio.

5.1. Método

Para poder estudiar el sistema necesitamos construir una matriz de adyacencia que nos describa las relaciones que se producen entre las distintas especies de plantas. Las interacciones entre las especies vegetales se calculan mediante el análisis del patrón de asociación espacial entre pares de especies [21].

Aunque sea una aproximación, el patrón espacial se ha empleado habitualmente como método para inferir las interacciones en comunidades vegetales.

Para aplicar este método se identifican las diferentes especies que viven en la zona que queremos estudiar, registrando su posición espacial. Además se genera una distribución espacial aleatoria de estas especies en función de su abundancia en la zona. Comparando las dos distribuciones espaciales podemos obtener tres resultados distintos (figura 15):

- Cuando dos especies aparecen asociadas más de lo que cabría esperar por azar existe una interacción positiva entre ambas (*facilitación*).
- Si dos especies aparecen asociadas menos de lo que cabría esperar por azar se considera que existe una interacción negativa entre ambas (*competición*).
- Cuando dos especies aparecen asociadas según lo esperado por azar se considera que no existe interacción entre ambas o que dicha interacción es neutra (*neutralidad*).

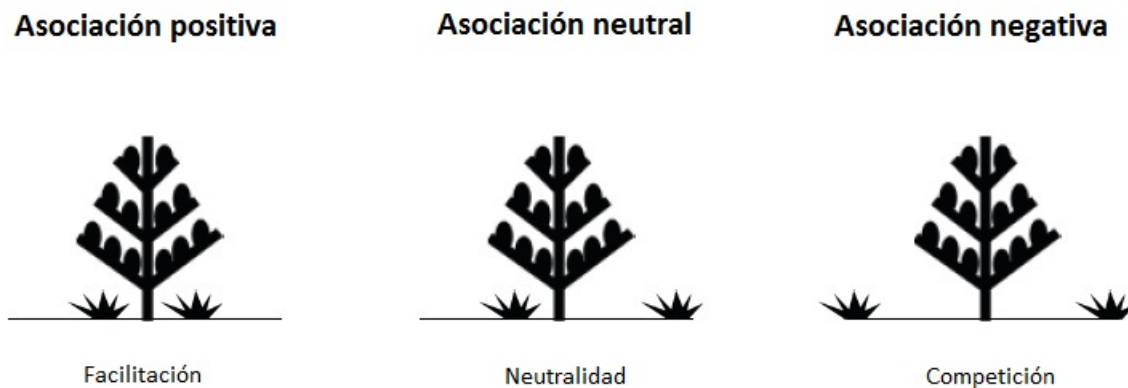


Figura 15: Tipos de asociación entre especies en un ecosistema. (Imagen cedida por H. Saiz)

Así somos capaces de construir una matriz que describa las relaciones entre especies, tanto positivas como negativas.

5.2. Sistemas a estudiar

La zona a estudiar se encuentra en el Parque Natural Cabo de Gata-Níjar, Almería. Específicamente, se analizará una zona semiárida dentro del parque que es habitualmente pastada por ovejas. En el trabajo analizaremos dos zonas diferentes, una con alta carga ganadera en la que encontramos 42 especies diferentes y otra con carga moderada con 46 especies (ver A).

En estas zonas pastadas por el ganado, las especies responsables de formar las manchas actúan como protección ante los herbívoros. Las plantas en el interior de estas manchas están protegidas del consumo por parte del ganado, lo cual permite mantener la biodiversidad. Este mecanismo se llama defensa asociacional y es común en comunidades vegetales sometidas a presión herbívora. Normalmente son las especies de tipo arbusto las que compiten entre sí y facilitan a las herbáceas y gramíneas formando las manchas de vegetación [21].

En la figura 16 se muestra la representación de las conexiones entre las especies que conviven en la zona muy pastada. Como vemos hay un total de 42 nodos, cada uno correspondiente a una especie. Los links en color verde representan interacciones positivas entre especies mientras que los links en rojo, las negativas.

Debido al reducido número de nodos podemos realizar un primer análisis visual de la red. El nodo 0 corresponde a la especie *Stipa tenacissima* L., gramínea muy competitiva dominante en la comunidad que siempre aparece segregada del resto. Esto se ve reflejado en la gran cantidad de conexiones negativas que tiene este nodo. Así mismo, cabe destacar el papel del nodo 6, *Chamaerops humilis* L., como especie atractora. Se trata de uno de los arbustos responsables de crear los microhábitats donde se establecen las especies no resistentes al pastoreo (defensa asociacional). Por último, es importante mencionar que los nodos 28 y 32 están conectados entre sí pero desconectados de los demás, por lo que es de esperar que su evolución vaya aparte del resto.

La figura 17 es la representación de la otra zona a estudiar. En esta zona el número de especies distintas es mayor, así como las conexiones entre ellas, por lo que es más difícil analizar la red a simple vista. Sin embargo, sí que podemos determinar el comportamiento de algunas especies. El nodo 0 vuelve a tener solo conexiones negativas ya que se trata de la misma especie que en la red anterior, *Stipa tenacissima*. Además, en este caso el nodo 1 también tiene solo conexiones negativas. Podemos ver también que el nodo 3 es una especie atractora que además compite con otras, al igual que el nodo

9. Por último, también tenemos nodos formando grupos que están desconectados de la red por lo que su comportamiento será independiente de los demás.

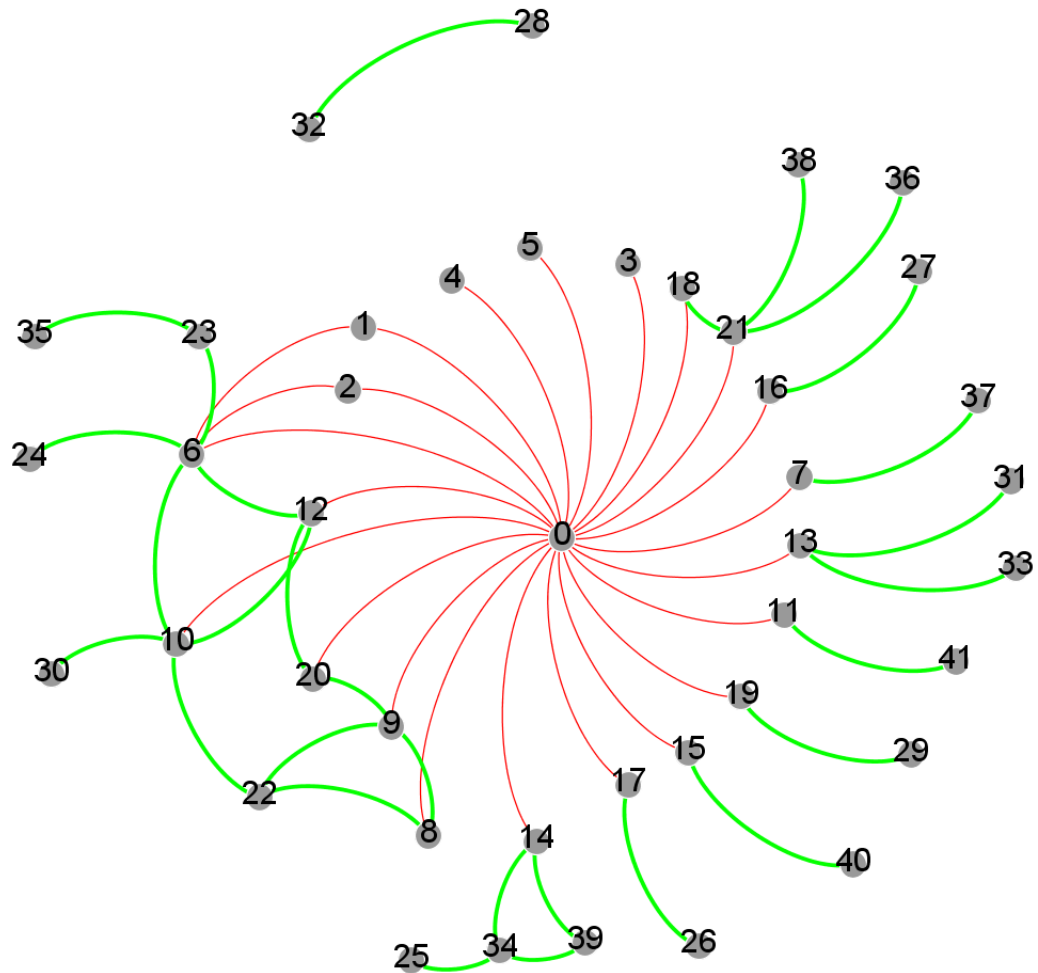


Figura 16: Representación de las interacciones entre especies en la zona muy pastada.

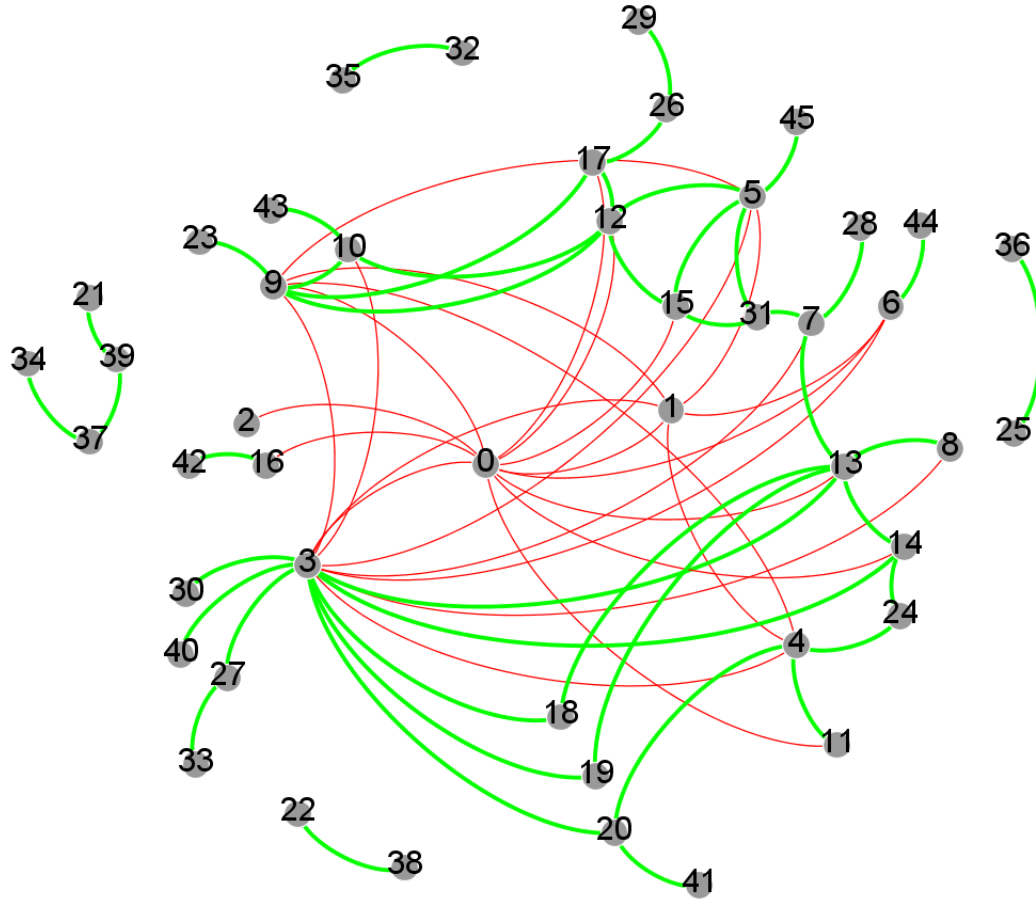


Figura 17: Representación de las interacciones entre especies en la zona menos pastada.

5.3. Resultados

Para estudiar el sistema se ha utilizado el mismo algoritmo que en los apartados anteriores. Con el fin de facilitar el análisis de los resultados se han escogido unas condiciones iniciales diferentes: las fases iniciales de cada nodo son cero y las frecuencias naturales siguen una distribución uniforme centrada en cero desde -0.001 a 0.001. Como veremos más adelante estas condiciones iniciales harán que el sistema comience en un estado prácticamente sincronizado que evolucionará hacia la formación de diferentes grupos.

5.3.1. Zona 1

En la figura 18a se ha representado la curva $r(\lambda)$ para la zona muy pastada. Hemos visto, cuando estudiábamos las redes interconectadas entre sí por interacciones negativas, que el parámetro de orden del sistema completo se hacía cero (figura 12). En este caso obtenemos un resultado distinto ya que, al tratarse de una red real, no solo tenemos dos grupos, cuyos elementos están sincronizados y moviéndose

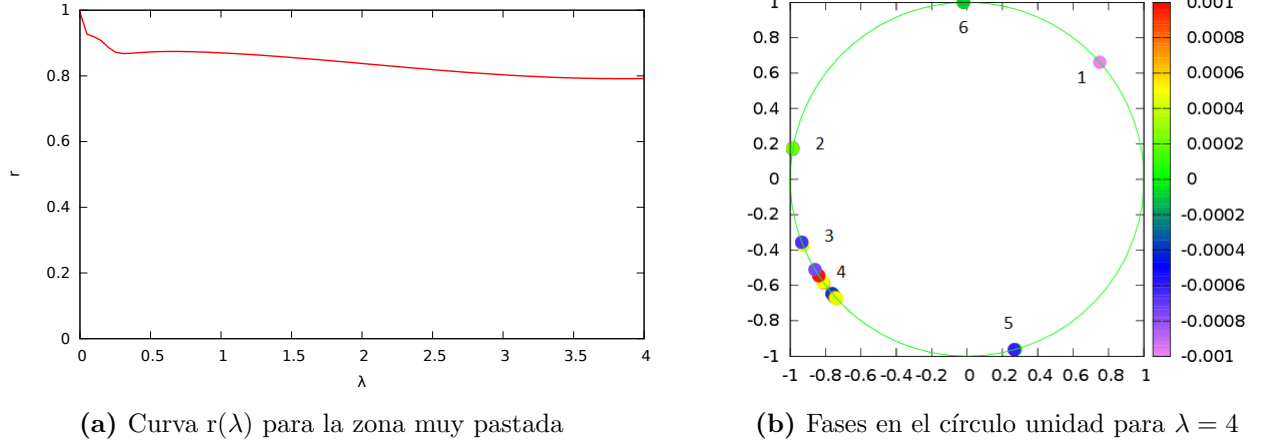


Figura 18: Representación de la evolución de la red muy pastada

con fases opuestas, sino que se forman varios grupos distintos, representando cada uno de ellos un tipo de mancha de vegetación formada por determinadas especies. Además, puesto que las condiciones iniciales son prácticamente iguales para todos los nodos, el sistema comienza en el estado sincronizado para más tarde estabilizarse en un estado no sincronizado.

Podemos ver más claramente los grupos que se forman, o manchas de vegetación, representando las fases de cada nodo en el círculo unidad (figura 18b). Puesto que esta representación corresponde a una λ determinada, una forma mejor de ver la evolución de los nodos y la formación de grupos es representar la fase relativa de cada nodo en función de λ . Este resultado se muestra en la figura 19.

Se ha tomado como referencia el nodo 0 por ser el más conectado y se ha calculado la fase relativa de cada nodo con respecto a éste para cada valor de λ . Así, se observa claramente que todos los nodos se alejan del nodo cero, ya que éste sólo tiene conexiones negativas con ellos, y más tarde se van diferenciando los distintos grupos, que se estabilizan con respecto al nodo de referencia. Vemos que el grupo 6, formado por los nodos 28 y 32, no sigue el mismo comportamiento que los demás. Éstos, como hemos comentado antes, están desconectados del resto, por lo que su comportamiento es independiente.

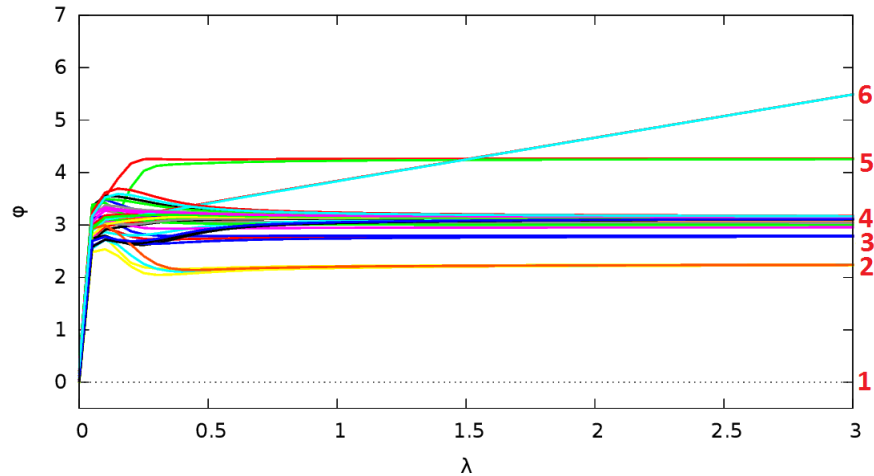


Figura 19: Fase relativa respecto a λ

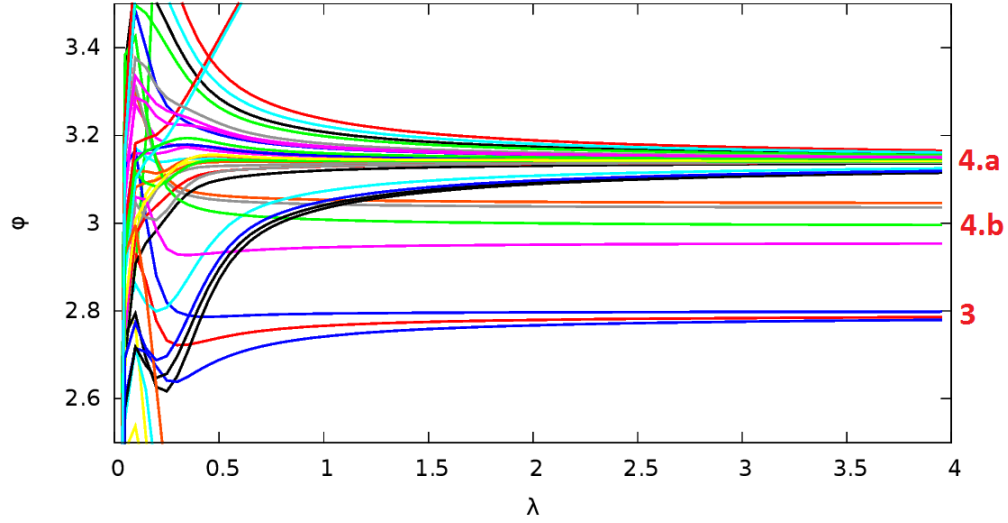


Figura 20: Zoom en torno a $\varphi = 3$

Al igual que veíamos en la figura 18b, en la figura 19 vemos que se forman 6 grupos distintos. Sin embargo, ampliando en torno a $\varphi = 3$ vemos que el grupo 4 se acaba dividiendo en otros dos (figura 20). La tabla 1 muestra qué nodos pertenecen a cada uno de los grupos.

Grupo	Nodos
1	0
2	6, 23, 24, 35
3	10, 12, 30
4.a	3, 4, 5, 7, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 25, 26, 27, 29, 31, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41
4.b	8, 9, 20, 22
5	1, 2
6	28, 32

Cuadro 1: Nodos que pertenecen a cada grupo

Todos estos resultados obtenidos del modelo cuadran con lo que sabemos de la red (figura 16):

- El nodo 0, *Stipa tenacissima*, aparece separado del resto.
- El nodo 6, *Chamaerops humilis*, es una especie atractora que agrupa a los nodos 23, 24 y 35.
- Los nodos 1 y 2 aparecen en un grupo solos ya que son equivalentes, tienen una conexión negativa con el nodo 0 y otra con el 6.

El comportamiento de estos nodos junto con el grupo del 6 y el 0 queda bien determinado en la figura 18b, puesto que los tres grupos tienen conexiones negativas entre ellos, forman un triángulo en el círculo unidad.

- El nodo 22, *Periploca laevigata* Aiton, también especie atractora, agrupa a los nodos 8, 9 y 20.
- Los nodos 28 y 32 aparecen siempre juntos y son independientes del resto.
- El grupo 4.a agrupa el resto de nodos ya que para el modelo son todos equivalentes, nodos conectados negativamente con el nodo 0, por lo que aparecen juntos en un mismo grupo con fases opuestas al nodo cero. Este comportamiento también se observa muy bien en la figura 18b.

5.3.2. Zona 2

En la figura 21a se representa la curva $r(\lambda)$ para esta segunda zona (figura 17). Al igual que en la zona 1, el sistema comienza en el estado sincronizado para evolucionar a un estado no sincronizado. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurría en la red anterior, el sistema se estabiliza en un estado de menor sincronización. Esto se puede explicar observando la figura 21b donde se representan las fases de cada nodo en el círculo unidad. El hecho de que se formen más grupos con menos nodos en cada uno y que éstos se repartan de manera más uniforme a lo largo del círculo, hace que el estado final esté menos sincronizado. Los números en rojo indican los grupos de nodos que están desconectados de la red y que por lo tanto evolucionan de manera independiente a los demás. Podemos ver que en este caso también se forman diferentes grupos.

Esto se observa también en la figura 22 que, como en la zona 1, representa la fase relativa frente a λ . De nuevo se ha escogido el nodo 0 como nodo de referencia por ser el más conectado. Con el fin de obtener una representación más clara de los grupos que se forman se han eliminado los que están desconectados de la red. En la tabla 2 se muestran qué nodos pertenecen a cada grupo.

Como vemos en la figura 22, lo primero que ocurre es que el nodo 0 se separa del 1 y todos los demás nodos se separan de ambos, debido a las conexiones negativas que existen entre ellos. Más tarde comienzan a actuar las conexiones positivas y se van definiendo los distintos grupos.

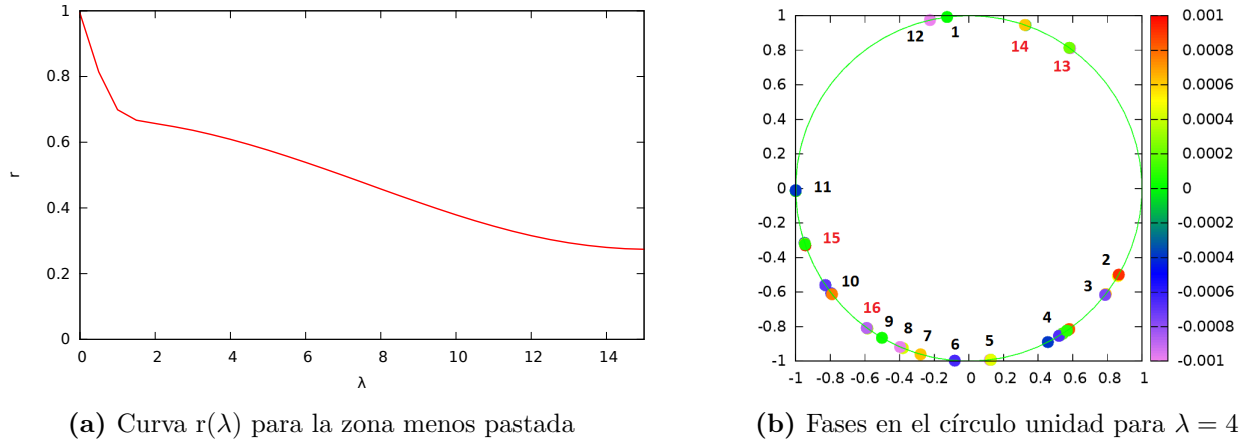


Figura 21: Representación de la evolución de la red menos pastada

Como en la zona 1, podemos relacionar los resultados obtenidos con lo que sabemos de la red:

- El nodo 0, *Stipa tenacissima*, vuelve a aparecer separada del resto de especies.
- El nodo 1, *Genista ramosissima*, es un arbusto que crece en ambientes duros para otras plantas como suelos pedregosos. Por tanto, aparece segregado del resto de la comunidad vegetal.
- Un ejemplo de especie atractora sería el nodo 3, *Chamaerops humilis*, la misma especie asignada al nodo 6 en la red anterior. En este caso es responsable de agrupar a los nodos 27, 30, 33 y 40 (grupo 11).
- Como ejemplo de especie atraída tenemos el nodo 13, *Brachypodium retusum*, que aparece asociada a varios arbustos en la red (3, 7, 8). Ésta se beneficia de la sombra que le proporcionan, pero no se asocia a ningún arbusto específicamente, por ello no aparece en un grupo definido, aparece sola con otra especie (grupo 8), aunque cerca de las otras dos (grupos 7 y 9).

- Los nodos de los grupos 13, 14, 15 y 16 aparecen siempre juntos y con un comportamiento independiente a los demás, por no estar conectados entre sí.

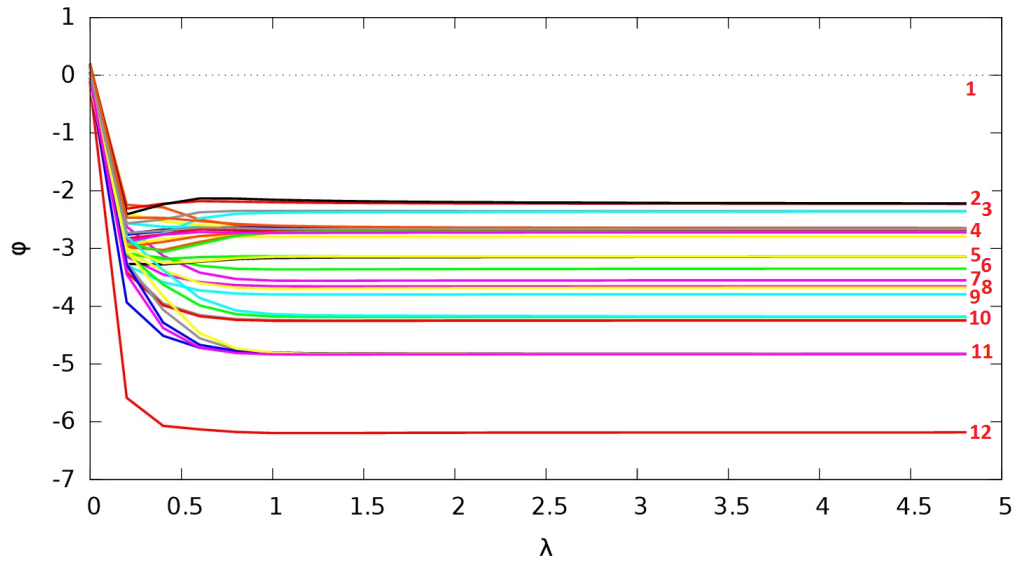


Figura 22: Fase relativa respecto a λ

Grupo	Nodos
1	0
2	10, 43
3	9, 23
4	5, 6, 7, 8, 12, 15, 17, 26, 28, 29, 31, 44, 45
5	2, 16, 42
6	11
7	4
8	13, 24
9	14
10	18, 19, 20, 41
11	3, 27, 30, 33, 40
12	1
13	25, 36
14	22, 38
15	21, 34, 37, 39
16	32, 35

Cuadro 2: Nodos que pertenecen a cada grupo

6. Conclusiones

En este trabajo, hemos comprobado, a través del modelo de Kuramoto, como el fenómeno de la sincronización en sistemas complejos se ve afectado por la estructura de las conexiones entre sus componentes, es decir, por la estructura de las redes complejas:

- Hemos calculado el umbral de sincronización en redes Erdős-Rényi y redes *scale free* comprobando que estas últimas favorecen la sincronización debido a la presencia de *hubs*.
- En el caso de redes con signo, una mayor presencia de links negativos retrasa la sincronización del sistema. Además, conforme aumentan las interacciones negativas el sistema se estabiliza en un estado de menor sincronización.
- Cuando tenemos dos redes conectadas entre sí por links negativos, el sistema se estabiliza en un estado no sincronizado, mientras que cada una de las redes individualmente se sincroniza. Además, un mayor número de conexiones negativas entre ambas redes favorece la sincronización individual de éstas.

Este último punto nos indica que en una red en la que hemos creado dos capas el modelo de Kuramoto es capaz de identificarlas y separarlas. Podemos trasladar este resultado al campo de la ecología, en el que las especies de un ecosistema forman grupos de especies que interaccionan positivamente entre ellas pero negativamente con el resto. El objetivo es estudiar redes reales que representen la relación entre las diferentes especies de un ecosistema y ser capaces de caracterizar estos grupos de una manera rápida y sencilla.

Como hemos visto, esto es posible con el modelo de Kuramoto, que nos ha permitido estudiar las relaciones entre especies en dos zonas distintas. Debido a la frustración de las redes estudiadas, no es posible determinar todos los grupos que se forman, pero los resultados obtenidos nos permiten identificar algunas de las especies que tienen un papel importante en el ecosistema.

El conocimiento de los grupos que se forman en un ecosistema y la identificación de las especies responsables de su formación es importante porque permite aplicar políticas de gestión ambiental más eficaces, ya que las diferentes actuaciones se centrarán en las especies responsables de mantener la biodiversidad; y más eficientes, ya que los recursos empleados se utilizarán de manera más óptima.

7. Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mi director, Jesús Gómez Gardeñes, por haberme propuesto este tema para el trabajo fin de grado y por toda su ayuda y apoyo durante el desarrollo del mismo.

Además, dar las gracias a Hugo Saiz y Concepción L. Alados del Instituto Pirenaico de Ecología - CSIC por prestar los datos de las redes de vegetación y contribuir a la discusión de los resultados.

Referencias

- [1] Mark Newman. The physics of networks. *Physics Today*, 61(11):33–38, 2008.
- [2] Steven Strogatz. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order (Penguin Press Science)*. Penguin Books, Limited (UK), 2008.
- [3] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, and Jürgen Kurths. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences (Cambridge Nonlinear Science Series)*. Cambridge University Press, 2003.
- [4] WH Eccles and JH Vincent. British patent spec. clxiii. 1920.
- [5] EV Appleton. Automatic synchronization of triode oscillators. In *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, volume 21, page 231, 1922.
- [6] John William Strutt Baron Rayleigh. *The theory of sound*, volume 2. Macmillan, 1896.
- [7] Arthur T Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of theoretical biology*, 16(1):15–42, 1967.
- [8] Steven H Strogatz. Exploring complex networks. *Nature*, 410(6825):268–276, 2001.
- [9] Y Kuramoto. International symposium on mathematical problems in theoretical physics, edited by h. araki. *of Lecture Notes in Physics, Springer, New York*, 39:420, 1975.
- [10] Steven H Strogatz. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1):1–20, 2000.
- [11] Mark Newman. *Networks: an introduction*. Oxford University Press, 2010.
- [12] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs i. *Publ. Math. Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- [13] Réka Albert, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási. Internet: Diameter of the world-wide web. *Nature*, 401(6749):130–131, 1999.
- [14] Takashi Ichinomiya. Frequency synchronization in a random oscillator network. *Physical Review E*, 70(2):026116, 2004.
- [15] Sergio Gómez, Albert Diaz-Guilera, Jesús Gómez, Gardeñes, Conrad J Perez-Vicente, Yamir Moreno, and Alex Arenas. Diffusion dynamics on multiplex networks. *Physical review letters*, 110(2):028701, 2013.
- [16] Alessio Cardillo, Jesús Gardeñes, Massimiliano Zanin, Miguel Romance, David Papo, Francisco del Pozo, and Stefano Boccaletti. Emergence of network features from multiplexity. *Scientific reports*, 3, 2013.
- [17] Robert T Paine. Food web complexity and species diversity. *American Naturalist*, pages 65–75, 1966.
- [18] Thomas C Ings, José M Montoya, Jordi Bascompte, Nico Blüthgen, Lee Brown, Carsten F Dormann, François Edwards, David Figueroa, Ute Jacob, J Iwan Jones, et al. Review: Ecological networks–beyond food webs. *Journal of Animal Ecology*, 78(1):253–269, 2009.
- [19] Martín R Aguiar and Osvaldo E Sala. Patch structure, dynamics and implications for the functioning of arid ecosystems. *Trends in Ecology & Evolution*, 14(7):273–277, 1999.

- [20] Rob W Brooker, Fernando T Maestre, Ragan M Callaway, Christopher L Lortie, Lohengrin A Cavieres, Georges Kunstler, Pierre Liancourt, Katja Tielbörger, Justin MJ Travis, Fabien Antelme, et al. Facilitation in plant communities: the past, the present, and the future. *Journal of Ecology*, 96(1):18–34, 2008.
- [21] Hugo Saiz and Concepción L Alados. Changes in semi-arid plant species associations along a livestock grazing gradient. *PloS one*, 7(7), 2012.

Anexos

A. Tablas de especies

Nodo	Nombre	Tipo vital
0	<i>Stipa tenacissima</i> L.	Gramínea
1	<i>Launaea lanifera</i> Pau	Arbusto
2	<i>Plantago bellardi</i> All.	Herbácea
3	<i>Asphodelus tenuifolius</i> Cav.	Herbácea
4	<i>Leontodon longirrostris</i> (Finch & P.D.Sell) Talavera	Herbácea
5	<i>Medicago truncatula</i> Gaertner	Herbácea
6	<i>Chamaerops humilis</i> L.	Arbusto
7	<i>Thymus hyemalis</i> Lange	Arbusto
8	<i>Lycium intricatum</i> Boiss	Arbusto
9	<i>Salsola genistoides</i> Juss. Ex Poiret	Arbusto
10	<i>Brachypodium retusum</i> (Pers.) Beauv.	Gramínea
11	<i>Brachypodium distachyon</i> L.	Gramínea
12	<i>Phlomis purpurea</i> L.	Arbusto
13	<i>Fagonia cretica</i> L.	Herbácea
14	<i>Plantago amplexicaulis</i> Cav.	Herbácea
15	<i>Diploaxis erucoides</i> (L.) DC.	Herbácea
16	<i>Euphorbia exigua</i> L.	Herbácea
17	<i>Misopates orontium</i> (L.) Rafin.	Herbácea
18	<i>Anagallis</i> L. ssp.	Herbácea
19	<i>Ballota hirsuta</i> Benth.	Arbusto
20	<i>Dactylis glomerata</i> L.	Gramínea
21	<i>Fumana laevipes</i> L.	Arbusto
22	<i>Periploca laevigata</i> Aiton	Arbusto
23	<i>Asparagus horridus</i> L.	Herbácea
24	<i>Asparagus albus</i> L.	Herbácea
25	<i>Centaurea mellitensis</i> L.	Herbácea
26	<i>Arisarum simorrhinum</i> Durieu	Herbácea
27	<i>Euphorbia segetalis</i> L.	Herbácea
28	<i>Carduus burgeenus</i>	Herbácea
29	<i>Viola arborescens</i> L.	Herbácea
30	<i>Carlina corymbosa</i> L.	Herbácea
31	<i>Heliantemum almeriense</i> Pau.	Arbusto
32	<i>Bromus rubens</i> L.	Gramínea
33	<i>Reichardia picroides</i> (L.) Roth.	Herbácea
34	<i>Silene colorata</i> Poir	Herbácea
35	<i>Teucrium charidemi</i> Sandwith	Arbusto
36	<i>Stipa capensis</i> Thunb	Gramínea
37	<i>Phagnalon saxatile</i> L.	Arbusto
38	<i>Hedypnois cretica</i> (L.)Dum.	Herbácea
39	<i>Rhodalsine geniculata</i> (Poir.) F.N. Williams	Herbácea
40	<i>Anthyllis tetraphylla</i> L.	Arbusto
41	<i>Lamarckia aurea</i> (L.) Moench.	Gramínea

Número	Nombre	Tipo vital
0	<i>Stipa tenacissima</i> L.	Gramínea
1	<i>Genista ramosissima</i> (Desf.) Poir.	Arbusto
2	<i>Viola arborescens</i> L.	Herbácea
3	<i>Chamaerops humilis</i> L.	Arbusto
4	<i>Periploca laevigata</i> Aiton	Arbusto
5	<i>Launaea lanifera</i> Pau	Arbusto
6	<i>Lavandula multifida</i> L.	Arbusto
7	<i>Sideritis oxeoxylla</i> (Pau) Rivas Goday & Gomez	Arbusto
8	<i>Olea europaea</i> L.var. <i>Silvestris</i> Brot	Arbusto
9	<i>Thymus hyemalis</i> Lange	Arbusto
10	<i>Phagnalon saxatile</i> L.	Arbusto
11	<i>Brachypodium distachyon</i> L.	Gramínea
12	<i>Phlomis purpurea</i> L.	Arbusto
13	<i>Brachypodium retusum</i> (Pers.) Beauv.	Gramínea
14	<i>Melica minuta</i> L.	Gramínea
15	<i>Helianthemum almeriense</i> Pau.	Arbusto
16	<i>Plantago afra</i> L.	Herbácea
17	<i>Dactylis glomerata</i> L.	Gramínea
18	<i>Ballota hirsuta</i> Benth.	Arbusto
19	<i>Asparagus albus</i> L.	Herbácea
20	<i>Euphorbia segetalis</i> L.	Herbácea
21	<i>Asphodelus tenuifolius</i> Cav.	Herbácea
22	<i>Asparagus horridus</i> L.	Herbácea
23	<i>Dianthus charidemi</i> Pau	Herbácea
24	<i>Convolvulus sicularis</i> L.	Herbácea
25	<i>Paronichia suffruticosa</i> (L.)DC.	Herbácea
26	<i>Gallium verrucosum</i> Hudson	Herbácea
27	<i>Lycium intricatum</i> Boiss	Arbusto
28	<i>Plantago bellardi</i> All.	Herbácea
29	<i>Plantago albicans</i> L.	Herbácea
30	<i>Scorzonera graminifolia</i> L.	Herbácea
31	<i>Anthyllis cytisoides</i> L.	Arbusto
32	<i>Stoibrax dichotomum</i> (L.) Rafin.	Herbácea
33	<i>Stipa capensis</i> Thunb	Gramínea
34	<i>Bromus rubens</i> L.	Gramínea
35	<i>Ephedra fragilis</i> Desf	Arbusto
36	<i>Hyparrhenia hirta</i> L.	Gramínea
37	<i>Lactuca virosa</i> L.	Herbácea
38	<i>Reichardia Roth</i> ssp.	Herbácea
39	<i>Erodium cicutarium</i> L. Willd.	Herbácea
40	<i>Sonchus tenerrimus</i> L.	Herbácea
41	<i>Cardus tenuiflorus</i> Curtis	Herbácea
42	<i>Filago pyramidata</i> L.	Herbácea
43	<i>Teucrium lusitanicum</i> Scribn.	Arbusto
44	<i>Phalaris</i> L. ssp.	Gramínea
45	<i>Bromus matritensis</i> L.	Gramínea

